DOI:10.13338/j.issn.1674-649x.2012.04.004

西 安 工 程 大 学 学 报
Journal of Xi'an Polytechnic University
第 26 卷第 4 期(总 116 期)　2012 年 8 月　Vol. 26, No. 4(Sum. No. 116)

文章编号:1674-649X(2012)04-0533-03

关于 Smarandache 因子个数为 n 的最小数问题

苏娟丽

(杨凌职业技术学院 公共课教学部,陕西 杨凌 712100)

摘要: $\forall n \in \mathbf{N}_+$,Smarandache因子个数为$n$的最小数$T_n$定义为最小的正整数$k$,使得$d(k)=n$.即$T_n=\min\{k:k\in \mathbf{N},d(k)=n\}$,其中$d(n)$为Dirichlet除数函数.利用初等方法以及素数的分布性质研究$\ln(T_n)$在Smarandache简单数列上的均值分布问题,并给出一个较强的渐近公式.

关键词: Smarandache因子个数为n的最小数问题;简单数列;均值;渐近公式;初等方法;素数分布

中图分类号: O 156.4　　**文献标识码:** A

1 引言及结论

对任意正整数n,F. Smarandache引入了因子个数为n的最小数数列$\{T_n\}$.即定义T_n为最小的正整数k,使得$d(k)=n$.或者$T_n=\min\{k:k\in \mathbf{N},\ d(k)=n\}$,其中$d(n)$为Dirichlet除数函数,$N$为自然数的集合.例如$\{T_n\}$的前几个值为:$T_1=1$,$T_2=2$,$T_3=4$,$T_4=6$,$T_5=16$,$T_6=12$,$T_7=64$,…….一般地当$p$为素数时有$T_p=2^{p-1}$.在文献[1]中,Amarnath Murthy及CharlesAshbacher建议人们研究数列$\{T_n\}$的性质,同时还提出了有关$\{T_n\}$的许多猜想,其中之一就是猜测数列$\{T_n+1\}$中包含无穷多个素数.本文的主要目的是利用初等方法以及素数的分布性质研究$\ln(T_n)$在Smarandache简单数列上的均值分布问题,并给出一个较强的渐近公式.为叙述本文的主要结论,首先引入Smarandache简单数列的概念.美籍罗马尼亚数论专家F. Smarandache教授在文献[2]中引入了简单数的概念,即将所有满足条件$\prod_{d\mid n} d \leqslant n^2$的正整数$n$称为简单数.或者说$n$的所有真因子之积不超过$n$.所有简单数按照大小顺序排列而成的数列叫简单数列.为方便起见,用A表示所有简单数构成的集合.关于简单数的性质及相关的均值问题,有不少学者进行了研究,获得了一系列有意义的研究成果,参阅文献[3-8].本文研究了T_n在简单数列上对数值的均值分布问题,获得了一个较强的渐近公式.具体地说也就是证明了下面的

定理 1 设k为给定的正整数.$\forall x\in \mathbf{R}$,$x>1$,有渐近公式

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}} \ln(T_n)=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 a_i $(i=1,2,\cdots,k)$为可计算的常数且$a_1=(1/2+C)\cdot\ln 2$,$C=\sum_{p}\frac{1}{p^2}$为常数,$\sum_{p}$表示对所有素数求和.

收稿日期: 2012-05-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(11071194);陕西省教育厅科学计划项目(12JK0871)

作者简介: 苏娟丽(1982-),女,陕西省扶风县人,杨凌职业技术学院助教. E-mail:alice0229@126.com

2 引理

为了完成定理的证明，需要下面几个简单引理，首先有

引理1 对任意两个不同的素数 p 及 q 且 $p>q$，有计算公式

$$T_{pq}=2^{p-1}\cdot 3^{q-1}.$$

证明 设 $T_{pq}=n$，则由 T_{pq} 的定义有 $d(n)=pq$. 设 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$. 于是由除数函数 $d(n)$ 及 T_{pq} 的定义有

$$d(n)=d(T_{pq})=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)=pq. \tag{1}$$

显然由式(1)不难推出 $1\leqslant s\leqslant 2$ 且 $p_1=2$，$p_2=3$. 当 $s=1$ 时，则 $\alpha_1=pq-1$，此时 $n=2^{pq-1}$；当 $s=2$ 时，则 α_1 及 α_2 中一个是 $p-1$，另一个是 $q-1$. 但是当 $p>q$ 时，$2^{p-1}\cdot 3^{q-1}<2^{q-1}\cdot 3^{p-1}$. 又因 $2^p\geqslant 4>3$，所以 $2^{p(q-1)}>3^{q-1}$ 或者 $2^{pq-1}>2^{p-1}\cdot 3^{q-1}$. 即当 $p>q$ 时有不等式

$$2^{p-1}\cdot 3^{q-1}<\min\{2^{pq-1},2^{q-1}\cdot 3^{p-1}\}.$$

由上式及 T_{pq} 的定义可推出 $T_{pq}=2^{p-1}\cdot 3^{q-1}$. 证毕.

引理2 对任意素数 $p\geqslant 3$，有计算公式

$$T_p=2^{p-1},\ T_{p^2}=2^{p-1}\cdot 3^{p-1}\ 及\ T_{p^3}=2^{p-1}\cdot 3^{p-1}\cdot 5^{p-1}.$$

证明 设 $d(n)=p$，则 n 只能含一个素因子，不妨设 $n=q^{\alpha}$，于是有 $\alpha+1=p$ 或者 $\alpha=p-1$. 显然在所有素数方幂 q^{p-1} 中，只有 2^{p-1} 最小，所以 $T_p=2^{p-1}$.

现在证明 $T_{p^2}=2^{p-1}\cdot 3^{p-1}$. 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准分解式且 $d(n)=p^2$. 则 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)=p^2$. 由于所有 $\alpha_i\geqslant 1$，所以 $1\leqslant s\leqslant 2$. 此时最小的 n 只有 2^{p^2-1} 或者 $2^{p-1}\cdot 3^{p-1}$. 但是当 $p\geqslant 3$ 时有 $2^{p-1}>3$ 或者 $2^{(p-1)^2}>3^{p-1}$ 或者 $2^{p^2-1}>2^{p-1}\cdot 3^{p-1}$. 所以由 T_p^2 的最小性知 $T_{p^2}=2^{p-1}\cdot 3^{p-1}$.

同理可证 $T_{p^3}=2^{p-1}\cdot 3^{p-1}\cdot 5^{p-1}$. 事实上如果 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)=p^3$，那么 n 有3种可能：$n=2^{p^3-1}$；$n=2^{p^2-1}\cdot 3^{p-1}$ 或者 $n=2^{p-1}\cdot 3^{p-1}\cdot 5^{p-1}$. 但是当素数 $p\geqslant 3$ 时有 $2^{p-1}\cdot 3^{p-1}\cdot 5^{p-1}<\min\{2^{p^3-1},2^{p^2-1}\cdot 3^{p-1}\}$，所以由 T_{p^3} 的最小性可知 $T_{p^3}=2^{p-1}\cdot 3^{p-1}\cdot 5^{p-1}$. 证毕.

引理3 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$n\in A$ 为简单数当且仅当 n 为下列4种情况：$n=p$，p^2，pq，p^3，其中 p 及 q 为不同的素数.

证明 参阅文献[3]中引理1.

3 定理的证明

现在利用上面3个简单引理完成定理1的证明. 由引理1、引理2及引理3可得：

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\ln(T_n)=&\sum_{p\leqslant x}\ln(2^{p-1})+2\sum_{1\leqslant q<p\leqslant x/q}\ln(2^{p-1}\cdot 3^{q-1})+\sum_{p^2\leqslant x}\ln(2^{p-1}\cdot 3^{p-1})+\\&\sum_{2^3<p^3\leqslant x}\ln(2^{p-1}\cdot 3^{p-1}\cdot 5^{p-1})+\ln(2^3\cdot 3)=\\&\sum_{p\leqslant x}(p-1)\ln 2+2\sum_{1\leqslant q<p\leqslant x/q}(p-1)\ln 2+2\sum_{1\leqslant q<p\leqslant x/q}(q-1)\ln 3+\\&\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}(p-1)\ln 6+\sum_{2<p\leqslant\sqrt[3]{x}}(p-1)\ln 30+\ln 24.\end{aligned}\tag{2}$$

设 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的所有素数的个数，则由素数定理(参阅文献[9])可知，$\forall k,k\in\mathbf{N}$ 有渐近式

$$\pi(x)=\sum_{p\leqslant x}1=\sum_{i=1}^{k}\frac{d_i\cdot x}{\ln^i x}+O\left(\frac{x}{\ln^{k+1}x}\right),\tag{3}$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数且 $d_1=1$.

应用Abel恒等(参阅文献[10]中定理4.2)及式(3)可得

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant x}p=&x\cdot\pi(x)-\int_2^x\pi(y)\mathrm{d}y=x\cdot\pi(x)-\int_2^x\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{d_i\cdot y}{\ln^i y}+O\left(\frac{y}{\ln^{k+1}y}\right)\right)\mathrm{d}y=\\&\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),\end{aligned}\tag{4}$$

其中 c_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数且 $c_1=1/2$.

注意到无穷级数 $\sum_p \frac{1}{p^2}=C$ 收敛，应用式(4)有

$$\sum_{q<p\leqslant x/q} p=\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p\leqslant x/q} p+O(x^{3/2})=$$

$$\sum_{q\leqslant\sqrt{x}}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{c_i\cdot x^2}{q^2\ln^i x/q}+O\left(\frac{x^2}{q^2\ln^{k+1}x/q}\right)\right)+O(x^{3/2})=\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right), \tag{5}$$

其中 b_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数且 $b_1=\frac{1}{2}\sum_p\frac{1}{p^2}=\frac{1}{2}\cdot C$.

由 Abel 恒等容易得到估计是

$$\sum_{1\leqslant q<p\leqslant x/q}(q-1)=O\left(\frac{x^{3/2}}{\ln^2 x}\right) \tag{6}$$

结合(2),(4),(5)及(6)可得

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\ln(T_n)=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i\cdot x^2}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1}x}\right),$$

其中 a_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 为可计算的常数且 $a_1=\left(\frac{1}{2}+C\right)\cdot\ln 2$，$C=\sum_p\frac{1}{p^2}$ 为常数，$\sum_p$ 表示对所有素数求和. 证毕.

参考文献：

[1] MURTHY Amarnath, ASHBACHER Charles. Generalized partitionsand new ideas on number theory and Smarandache sequences[M]. Hexis: Phoenix, 2005: 87.

[2] SMARANDACHE F. Only problems, not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993: 23.

[3] LIU Hongyan, ZHANG Wenpeng. On the simple numbers and themean value problems[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 171-175.

[4] 陈国慧. Smarandache 问题的新进展[M]. Phoenix: High American Press, 2007.

[5] 刘燕妮. 李玲, 刘宝利. Smarandache 未解决的问题及其新进展[M]. Phoenix: High American Press, 2008.

[6] 苟素. Smarandache k_n 数字数列及其一类均值性质[J]. 纺织高校基础科学学报, 2011, 24(2): 250-252.

[7] 朱敏慧. Smarandache 函数的混合均值[J]. 纺织高校基础科学学报, 2009, 22(3)295-298.

[8] 刘华. 关于包含 F. Smarandache 简单函数的除数函数 $\alpha(n)$[J]. 纺织高校基础科学学报, 2007, 20(4): 361-363.

[9] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[10] APOSTOL T M. Introduction to analytic number theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.

On the Smarandache smallest number with *n* divisors sequence

SU Juan-li

(Department of Basic Course, Yangling Vocational and Technical College, Yangling, Shaanxi 712100, China)

Abstract: For any positive integer n, the Smarandache smallest number with n divisors sequence $\{T_n\}$ is defined as the smallest positive integer $T_n=k$ such that $d(k)=n$, where $d(n)$ is the Dirichlet divisor function. The main purpose of this paper is using the elementary method and the distribution properties of the primes to study the mean value problem of $\ln(T_n)$ in the Smarandache simple numbers, and give a sharper asymptotic formula for it.

Key words: the Smarandache smallest number with n divisors sequence; simple sequence; mean value; asymptotic formula; elementary method; distribution of primes

编辑、校对：武 晖